Soluzione del Tutorato del 16/12/2010 (ST1- Esonero 28-5-2010) *(Orlandi)*

Esercizio 1 (9 punti) Sia X una singola osservazione della densitá

$$f(x,\theta) := (1+\theta)x^{\theta}1_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

(1) Trovare il test piú potente di ampiezza α per

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 1, \\ H_1 : \theta = 2. \end{cases}$$

(2) Si dia la definizione di errore di primo e secondo tipo. Si determini inoltre l'errore di primo e secondo tipo per il test trovato.

Soluzione Per il Teorema di Neyman-Pearson si trova il test piú potente nel modo seguente.

$$\lambda(x) = \frac{2x1_{(0,1)}(x)}{3x^2 1_{(0,1)}(x)} = \frac{2}{3x}1_{(0,1)}(x).$$

Dato $\lambda_0 > 0$ la regione critica del test é data

$$C^*_{\lambda_0} = \{x \in (0,1) : \frac{2}{3x} \le \lambda_0\}.$$

Quindi

$$C^*_{\lambda_0} = \{x \in (0,1) : \frac{2}{3\lambda_0} \le x\}.$$

L'ampiezza α del test $C^*_{\lambda_0}$ si ottiene determinando la funzione di potenza

$$\pi(\theta) = \int_{\frac{2}{3\lambda_0}}^{1} (\theta+1)x^{\theta}dx = 1 - \left(\frac{2}{3\lambda_0}\right)^{(\theta+1)}$$

e calcolandola in $\theta = 1$. L'ampiezza del test é quindi

$$\alpha = \int_{\frac{2}{3\lambda_0}}^{1} 2xdx = 1 - (\frac{2}{3\lambda_0})^2.$$

Quindi per ottenere un test di ampiezza α si deve scegliere $\lambda_0 = \frac{2}{3\sqrt{1-\alpha}}$.

L'errore di primo tipo: rifiutare l'ipotesi H_0 nel caso in cui questa sia vera.

L'errore di primo tipo: accettare l'ipotesi H_0 nel caso in cui questa sia falsa.

L'errore di primo tipo coincide con l'ampiezza del test. É quindi α.

L' errore di secondo tipo β per il test $C^*_{\lambda_0}$ si ottiene determinando

$$\beta = 1 - P[C^*_{\lambda_0}|\theta = 2] = \left(\frac{2}{3\lambda_0}\right)^3.$$

Esercizio 2 (9 punti) Sia X una singola osservazione della densitá

$$f(x,\theta) := (1+\theta)x^{\theta}1_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0$$

Si verifichi l'ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \theta \le 1, \\ H_1 : \theta > 1. \end{cases}$$

(1) Determinare e trovare un test uniformente pi˘ potente di ampiezza α (motivare).

(2) Determinare la funzione di potenza

Soluzione
1) La densitá appartiene alla famiglia esponenziale, infatti

$$f(x,\theta) = (1+\theta)e^{\theta \ln x} 1_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

Quindi applicando il teorema 9.5 del testo abbiamo

$a(\theta) = 1+\theta$, $b(x) = 1_{(0,1)}(x)$, $c(\theta) = \theta$, $d(x) = \ln x$. Allora la statistica per il test é $T = \ln X$. Poiché $c'(\theta) = 1 > 0$ e si vuole verificare $H_0 : \theta \leq 1$ in alternativa a $H_0 : \theta \geq 1$ il test é il seguente

$$C^* := \{x \in (0,1) : \log x \geq k^*\},$$

con $k^* \in R$ che si determina in funzione dell'ampiezza α del test. Poiché $x \in (0,1)$, il test ha significato se $k^* < 0$. La funzione di potenza é

$$\pi(\theta) = P\left[\log X \geq k^* | \, \theta\right] = P\left[X \geq e^{k^*} = k \middle| \, \theta\right] = \int_k^1 (1+\theta)x^\theta dx = 1 - k^{(\theta+1)}.$$

Si noti che $k < 1$. La $\pi(\theta)$ é una funzione crescente di θ, infatti $\pi'(\theta) = -k^{(\theta+1)} \ln k > 0$. Quindi

$$\alpha = \sup_{\theta \in (0,1]} \pi(\theta) = 1 - k^2.$$

Allora $k = \sqrt{1-\alpha}$. Quindi per un test uniformente piú potente di ampiezza α per $H_0 : \theta \leq 1$ in alternativa a $H_0 : \theta \geq 1$ la regione critica é

$$C^* := \{x \in (0,1) : x \geq \sqrt{1-\alpha}\}.$$

Esercizio 3 (6 punti) Si supponga che su 160 lanci di moneta (Testa-Croce) si sono avuti 100 esiti Testa. Trovare un intervallo di confidenza al 95 per cento dell esito Testa. La moneta é truccata?. (Suggerimento: si modelli l'esercizio associando a Testa il valore 1 e a Croce il valore 0).

Soluzione Sia $X_i \in \{0,1\}$ la variabile aleatoria associata all 'esito del lancio $i-$mo, con $i = 1, \ldots 160$ con $P[X_i = 1] = p$ e ovviamente $P[X_i = 0] = 1 - p$.

L'esercizio chiede di trovare un intervallo di confidenza al 90% di p. Possiamo determinare l'intervallo di confidenza utilizzando l'approssimazione del teorema del Limite centrale per grandi campioni. Sia $n = 160$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$. Si determini $z > 0$ in modo che

$$P\left[-z \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z\right] = \frac{95}{100}$$

Usando il teorema del Limite centrale approssimiamo la distribuzione $\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ con una normale Z di media 0 e varianza 1. ottenendo

$$P\left[-z \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z\right] \simeq P\left[-z \leq Z \leq z\right] = \frac{95}{100}.$$

Si ricava dalle tavole che $z = 1,96$. Risolvendo rispetto a p e trascurando termini superiori a $\frac{1}{\sqrt{n}}$ si ha che l'intervallo di confidenza (aleatorio) é

$$\left[\bar{X} - 1,96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + 1,96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right].$$

Il valore numerico con i dati del problema dell intervallo si ottiene sostituendo $\bar{X} = \frac{10}{16}$ e $n = 160$.

$$[\frac{10}{16} - 1,96\sqrt{\frac{\frac{10}{16}\frac{6}{16}}{160}}, \frac{10}{16} + 1,96\sqrt{\frac{\frac{10}{16}\frac{6}{16}}{160}}]$$

Se $\frac{1}{2} \in [\frac{10}{16} - 1,96\sqrt{\frac{\frac{10}{16}\frac{6}{16}}{160}}, \frac{10}{16} + 1,96\sqrt{\frac{\frac{10}{16}\frac{6}{16}}{160}}]$ allora la moneta é equa con probabilita $\frac{95}{100}$.

Esercizio 3 (6 punti) Sia $(X_1, \dots, X_n)$ un campione estratto da $N(\mu, \sigma^2)$. Si assuma la varianza σ^2 nota.

(1) Trovare un intervallo di confidenza per μ al 90 per cento.
(2) Quanto deve essere grande il campione affinché l'ampiezza di questo intervallo sia minore di 1.?

Soluzione La quantitt́a pivotale é

$$Q = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

dove $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. La distribuzione di Q é la distribuzione normale $N(0,1)$. Bisogna trovare z tale che

$$P[-z \leq Q \leq z] = \frac{90}{100}.$$

Si ottiene $z = 1,645$. Si trova facilmente che $\mu \in [\bar{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$. Per rispondere alla seconda domanda si ponga l'ampiezza dell intervallo

$$2z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

Si ottiene

$$n \geq 4z^2\sigma^2.$$